

# 第1讲 一元二次方程基础（加油站）

## 一、一元二次方程的概念

### 练习1

1. 下列是一元二次方程的是（ ）.

A.  $2x^2 - \frac{3}{x} + 1 = 0$

B.  $x^2 + y = 1$

C.  $(x-1)^2 = 0$

D.  $(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1 = 0$

2. 判断下列方程是不是一元二次方程.

(1)  $2x^2 - kx - 1 = 0$  ( $k$ 为常数).

(2)  $\frac{4}{x^2 + 3} = 1$ .

(3)  $1 - x^2 = 0$ .

(4)  $5x^2 = 0$ .

(5)  $x^2 + y = 0$ .

(6)  $(x+3)^2 = (x-3)^2$ .

(7)  $mx^2 - 3x + 2 = 0$  ( $m$ 为常数).

(8)  $(a^2 + 1)x^2 + (2a - 1)x + 5 - a = 0$  ( $a$ 为常数).

### 练习2

3. 已知关于 $x$ 的方程 $(m-1)x^{|m|+1} + (2m+1)x - m = 0$ 是一元二次方程，则 $m =$ \_\_\_\_\_.

4. 若方程 $(k^2 - 4)x^2 + (2 - 3k)x + (k - 2)y + 3k = 0$ 为二元一次方程，则 $k$ 的值为（ ）.

A. 2

B. -2

C. 2或-2

D. 以上均不对

5. 回答下列各题：

(1) 若一元二次方程 $(m-2)x^2 + 3(m^2 + 15)x + m^2 - 4 = 0$ 的常数项为零，则 $m$ 的值为\_\_\_\_\_.

(2)  $m$ 为何值时，关于 $x$ 的方程 $(m - \sqrt{2})x^{m^2} - (m + 3)x = 4m$ 是一元二次方程.

(3) 若 $x^{2a+b} - 3x^{a-b} + 1 = 0$ 是关于 $x$ 的一元二次方程，求 $a$ 、 $b$ 的值.

### 练习3

6. 关于 $x$ 的方程 $(x+m)^2 = n$ 的解是 $x_1 = -2, x_2 = 1$  ( $m, n$ 为常数), 则方程 $(x+m+3)^2 = n$ 的解是 ( ).
- A.  $x_1 = -2, x_2 = 1$     B.  $x_1 = -1, x_2 = 2$     C.  $x_1 = 1, x_2 = 4$     D.  $x_1 = -5, x_2 = -2$
7. 关于 $x$ 的方程 $a(x+m)^2 + b = 0$ 的解是 $x_1 = -2, x_2 = 1$  ( $a, m, b$ 均为常数,  $a \neq 0$ ), 则方程 $a(x+m+1)^2 + b = 0$ 的解是 ( ).
- A.  $x_1 = -3, x_2 = 0$     B.  $x_1 = 0, x_2 = 3$     C.  $x_1 = -4, x_2 = -1$     D.  $x_1 = 1, x_2 = 4$
8. 关于 $x$ 的方程 $a(x+m)^2 + b = 0$ 的解是 $x_1 = -2, x_2 = 1$  ( $a, m, b$ 均为常数,  $a \neq 0$ ), 则方程 $a(x+m+2)^2 + b = 0$ 的解是 ( ).
- A.  $x_1 = 0, x_2 = 3$     B.  $x_1 = -4, x_2 = -1$     C.  $x_1 = -4, x_2 = 2$     D.  $x_1 = 4, x_2 = 1$

### 练习4

9. 若关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2 + bx + 5 = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的一个解是 $x = 1$ , 则 $2015 - a - b$ 的值是 \_\_\_\_.
10. 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $(m+3)x^2 + 5x + m^2 - 9 = 0$ 有一个解是0, 则 $m$ 的值为 ( ).
- A. -3    B. 3    C. +3    D. 不确定
11. 已知实数 $a, b, c$ 满足 $4a + 2b + c = 0$ , 那么关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 一定有根 ( ).
- A.  $x = 2$     B.  $x = -2$     C.  $x = \pm 2$     D. 都不对
12. 已知 $x = -1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx - 10 = 0$ 的一个解, 且 $a \neq -b$ , 则 $\frac{a^2 - b^2}{2a + 2b}$ 的值为 \_\_\_\_.
13. 已知 $m$ 是方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的一个实数根, 求代数式 $(m^2 - m)\left(m - \frac{2}{m} + 1\right)$ 的值为 \_\_\_\_.

## 练习5

14. 根据下列表格对应值：

|                 |       |       |      |      |
|-----------------|-------|-------|------|------|
| $x$             | 3.23  | 3.24  | 3.25 | 3.26 |
| $ax^2 + bx + c$ | -0.04 | -0.02 | 0.01 | 0.03 |

则关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个解 $x$ 的范围是( ) .

- A.  $x < 3.24$       B.  $3.24 < x < 3.25$       C.  $3.25 < x < 3.26$       D.  $3.25 < x < 3.28$

15. 根据表格对应值：

|                 |       |      |      |      |
|-----------------|-------|------|------|------|
| $x$             | 1.1   | 1.2  | 1.3  | 1.4  |
| $ax^2 + bx + c$ | -0.59 | 0.84 | 2.29 | 3.76 |

判断关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个解 $x$ 的取值范围是( ) .

- A.  $1.1 < x < 1.2$       B.  $1.2 < x < 1.3$       C.  $1.3 < x < 1.4$       D. 无法判定

16. 根据下列表格的对应值，判断关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0, a, b, c \text{ 为常数})$ 的一个解 $x$ 的取值范围是( ) .

|                 |       |       |      |      |
|-----------------|-------|-------|------|------|
| $x$             | 3.23  | 3.24  | 3.25 | 3.26 |
| $ax^2 + bx + c$ | -0.06 | -0.02 | 0.03 | 0.09 |

- A.  $3 < x < 3.23$       B.  $3.23 < x < 3.24$       C.  $3.24 < x < 3.25$       D.  $3.25 < x < 2.26$

## 二、一元二次方程的解法

## 练习6

17. 解方程： $(2x - 1)^2 = 25$  .

18. 用适当的方法解下列一元二次方程 .

( 1 )  $4(x - 1)^2 - 36 = 0$  .

19. 用直接开平方法解关于 $x$ 的方程 .

( 1 )  $x^2 = 4$  .

( 2 )  $2x^2 - 6 = 0$  .

( 3 )  $(x - 3)^2 = 8$  .

( 4 )  $4(x - 1)^2 = 9$  .

( 5 )  $(2x - 1)^2 = (3x - 4)^2$  .

( 6 )  $4(2x - 5)^2 = 9(3x - 1)^2$  .

### 练习7

20. 用配方法解方程 $3x^2 - 6x + 1 = 0$  , 则方程可变形为 ( ) .

A.  $(x - 3)^2 = \frac{1}{3}$       B.  $3(x - 1)^2 = \frac{1}{3}$       C.  $(3x - 1)^2 = 1$       D.  $(x - 1)^2 = \frac{2}{3}$

21. 解方程 :  $2x^2 - 4x - 1 = 0$  ( 配方法 ) .

22. 用配方法解方程 :  $3x^2 - 5x - 2 = 0$  .

23. 解方程： $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$  .

### 练习8

24. 解方程： $5x^2 - 8x + 2 = 0$  ( 公式法 ) .

25. 用指定的方法解下列方程：

( 1 )  $2x^2 - 8x + 3 = 0$  ( 用公式法 ) .

26. 解方程：

( 1 )  $2x^2 + 2x - 1 = 0$  ( 公式法 ) .

27. 解一元二次方程：

( 1 )  $2x^2 - 9x + 8 = 0$  ( 公式法 ) .

( 2 )  $(x + 8)(x + 1) = -12$  .

28. 解答下列问题：

( 1 ) 用配方法解方程： $x^2 - 8x + 1 = 0$  .

( 2 ) 用公式法解方程： $5x^2 - 3x = x + 1$  .

### 练习9

29. 解方程： $x^2 + 10x + 16 = 0$  .

30. 解方程： $x^2 - 7x - 30 = 0$  .

31. 解方程： $x^2 + 4x + 8 = 2x + 11$  .

32. 解下列关于 $x$ 的方程 .

( 1 )  $x(x + 1) = 3x + 3$  .

( 2 )  $5x^2 - 3x = x + 1$  .

33. 解方程 .

( 1 )  $4x^2 - 3x - 5 = x - 2$  .

( 2 )  $(2x + 1)^2 + 4(2x + 1) + 3 = 0$  .

### 三、一元二次方程的判别式

#### 练习10

34. 方程  $x^2 - 3x = 4$  根的判别式的值是 ( ) .

A. -7

B. 25

C.  $\pm 5$

D. 5

35. 下列一元二次方程有两个相等的实数根的是 ( ) .

A.  $-x^2 - 3x + 1 = 0$     B.  $2x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{1}{4} = 0$     C.  $4x^2 + 5 = 4\sqrt{5}x$     D.  $3x^2 - 12x + 9 = 0$

#### 练习11

36. 已知关于  $x$  的方程  $kx^2 + (1 - k)x - 1 = 0$  , 下列说法正确的是 ( ) .

A. 当  $k = 0$  时, 方程无解

B. 当  $k = 1$  时, 方程有一个实数根

C. 当  $k = -1$  时, 方程有两个相等的实数根

D. 当  $k \neq 0$  时, 方程总有两个不相等的实数根

37. 若关于  $x$  的一元二次方程  $(a - 5)x^2 - 4x - 1 = 0$  有实数根, 则  $a$  的取值范围是 ( ) .

A.  $a \geq 1$

B.  $a \neq 5$

C.  $a > 1$  且  $a \neq 5$

D.  $a \geq 1$  且  $a \neq 5$

38. 若关于  $x$  的方程  $mx^2 - mx + 2 = 0$  有两个相等的实数根, 则  $m$  的值为 ( ) .

A. 0

B. 8

C. 4或8

D. 0或8

39. 若关于  $x$  的方程  $(k - 1)x^2 + 2x - 2 = 0$  有实数根, 则实数  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

40. 若关于  $x$  的方程  $(k - 2)x^2 + 2x - 1 = 0$  有实数根, 则实数  $k$  的取值范围是 ( ) .

A.  $k \geq 1$

B.  $k > 1$  且  $k \neq 2$

C.  $k \leq 1$

D.  $k \geq 1$  且  $k \neq 2$

## 练习12

41. 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $(x-3)(x-2) = m^2$ .

(1) 求证：对于任意实数 $m$ ，方程总有两个不相等的实数根.

(2) 若方程的一个根是1，求 $m$ 的值及方程的另一个根.

42. 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $mx^2 - (m+2)x + 2 = 0$ .

(1) 证明：不论 $m$ 为何值时，方程总有实数根.

(2)  $m$ 为何整数时，方程有两个不相等的正整数根.

43. 已知，关于 $x$ 的方程 $2x^2 - mx + n = 0$ .

(1) 当 $m - n = 4$ 时，判断方程根的情况.

(2) 若方程有两个相等的实数根，当 $n = 2$ 时，求此时方程的根.



44. 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $(a+c)x^2 + 2bx + (a-c) = 0$ ，其中 $a, b, c$ 分别为 $\triangle ABC$ 三边的长。

(1) 如果 $x = -1$ 是方程的根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由。

(2) 如果方程有两个相等的实数根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由。

(3) 如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形，试求这个一元二次方程的根。

## 四、一元二次方程的根系关系

### 练习13

45. 已知一元二次方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两根分别为 $x_1, x_2$ ，则 $x_1 \cdot x_2$ 的值为( )。

- A. -3                      B. 1                      C.  $-\frac{3}{2}$                       D.  $\frac{1}{2}$

46. 已知 $\alpha, \beta$ 是方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的两个实数根，则 $\alpha + \beta - \alpha\beta$ 的值为\_\_\_\_\_。

47. 设 $x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 2 = 0$ 的两个实数根，且 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 8$ ，则 $k$ 的值是\_\_\_\_\_。

48. 已知一元二次方程： $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个根分别是 $x_1, x_2$ ，则 $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ 的值为( )。

- A. -3                      B. 3                      C. -6                      D. 6

### 练习14

49. 若 $\alpha, \beta$ 是方程 $x^2 + 2x - 2015 = 0$ 的两个实数根，则 $\alpha^2 + 3\alpha + \beta$ 的值为\_\_\_\_\_。

50. 已知一元二次方程  $x^2 - 2x + m = 0$  .

( 1 ) 若方程有两个实数根, 求  $m$  的取值范围 .

( 2 ) 若方程有两个实数根为  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 + 3x_2 = 3$ , 求  $m$  的值 .

### 练习15

51. 已知  $x_1, x_2$  是关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 5x + a = 0$  的两个实数根, 且  $|x_1 - x_2| = \sqrt{5}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_ .

52. 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - (k-1)x - k + 2 = 0$  有两个实数根  $x_1, x_2$ , 若

$(x_1 - x_2)^2 + 2x_1x_2 = 1$ , 则  $k$  的值 ( ) .

A. 0或2

B. -2或2

C. -2

D. 2

53. 若关于  $x$  的方程  $x^2 + 2mx + m^2 + 3m - 2 = 0$  有两个实数根  $x_1, x_2$ , 则  $x_1(x_2 + x_1) + x_2^2$  的最小值为 \_\_\_\_\_ .

54. 设关于  $x$  的方程  $2x^2 + kx + 2 = 0$  的两根分别为  $\alpha, \beta$ , 且  $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ , 则  $k$  等于 ( ) .

A. 2

B. -4

C. 4

D. -2

55. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 - 2(k-1)x + k^2 = 0$  有两个实数根  $x_1, x_2$  .

( 1 ) 求  $k$  的取值范围 .

( 2 ) 若  $|x_1 + x_2| = x_1x_2 - 1$ , 求  $k$  的值 .

56. 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2 - (m - 3)x - m = 0$ ,

(1) 求证: 方程有两个不相等的实数根.

(2) 如果方程的两实根为 $x_1$ 、 $x_2$ , 且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$ , 求 $m$ 的值.

### 练习16

57. 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 4 = 0$

(1) 当 $m$ 为何值时, 方程有两个不相等的实数根?

(2) 若边长为5的菱形的两条对角线的长分别为方程两根的2倍, 求 $m$ 的值.

### 练习17

58. 若两个不等实数 $m, n$ 满足 $m^2 - 2m = a$ ,  $n^2 - 2n = a$ ,  $m^2 + n^2 = 5$ , 则 $m - n$ 的值为 \_\_\_\_\_.

59. 已知 $a, b$ 满足 $a^2 - 2a - 1 = 0$ ,  $b^2 - 2b - 1 = 0$ , 且 $a \neq b$ , 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 =$  \_\_\_\_\_.

60. 若 $ab \neq 1$ , 且 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ ,  $9b^2 + 2001b + 5 = 0$ , 则 $\frac{ab + a + 1}{b} =$  \_\_\_\_\_. (填小数形式)

61. 已知  $2m^2 - 5m - 1 = 0$  ,  $\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n} - 2 = 0$  , 且  $m \neq n$  , 求  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$  的值 .

### 练习18

62. 已知实数  $x_1$  、  $x_2$  满足  $x_1 + x_2 = 11$  ,  $x_1 x_2 = 30$  , 则以  $x_1$  、  $x_2$  为根的一元二次方程是 ( ) .

A.  $x^2 - 11x + 30 = 0$    B.  $x^2 + 11x + 30 = 0$    C.  $x^2 + 11x - 30 = 0$    D.  $x^2 - 11x - 30 = 0$

63. 已知  $x$ 、 $y$  均为实数 , 且满足  $xy + x + y = 17$  ,  $x^2 y + xy^2 = 66$  . 求  $x^2 + y^2$  的值 .

64. 实数  $x$  ,  $y$  ,  $z$  满足  $x + y + z = 5$  ,  $xy + yz + zx = 3$  , 求  $z$  的最大值 .